W 2012 Aufgabe I 3 **(18 VP)**

Ein Medikament kann mithilfe einer Spritze oder durch Tropfinfusion verabreicht werden.

a) Bei Verabreichung des Medikaments mithilfe einer Spritze wird die Wirkstoffmenge im Blut des Patienten beschrieben durch die Funktion f mit $f(t) = 130\,(e^{-0,2t} - e^{-0,8t})$; $0 \leq t \leq 24$
(t in Stunden nach der Injektion, f(t) in mg).
Skizzieren Sie den Graphen von f.
Das Medikament wirkt nur dann, wenn **mind**estens **36 mg** des Wirkstoffs im Blut vorhanden sind.
Bestimmen Sie den **Zeitraum**, in dem das Medikament wirkt.
Zu welchem **Zeitpunkt** nimmt die Wirkstoffmenge im Blut **am stärksten zu** bzw. **ab** ?
Berechnen Sie die **mittlere Wirkstoffmenge** im Blut während der **ersten 12** Stunden. (7 VP)

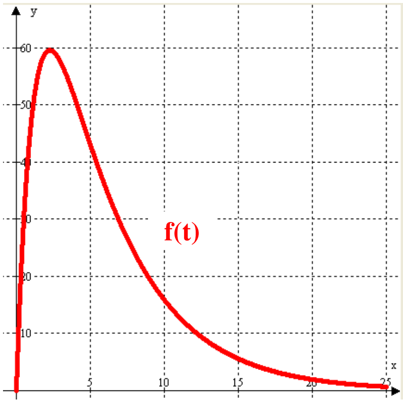
Wenn das Medikament stattdessen durch Tropfinfusion zugeführt wird, lässt sich die Wirkstoffmenge im Blut beschreiben durch die Funktion g mit $g(t) = 80\,(1 - e^{-0,05t})$; $t \geq 0$
(t in Minuten seit Infusionsbeginn, g(t) in mg).

b) Welche Wirkstoffmenge wird sich **langfristig** im Blut befinden ?
Zeigen Sie, dass die Wirkstoffmenge im Blut **ständig zunimmt**.
Zu welchem **Zeitpunkt** beträgt die **momentane Änderungsrate** der Wirkstoffmenge im Blut $1\,\frac{mg}{min}$?
In welchem **15-Minuten-Zeitraum** ändert sich die Wirkstoffmenge **um 30** mg ? (7 VP)

c) Geben Sie eine **Differenzialgleichung** des **beschränkten Wachstums** an, die von der Funktion g erfüllt wird.
Bei der Tropfinfusion wird dem Patienten pro Minute eine **konstante Wirkstoffmenge** zugeführt. Die **Abbaurate** ist dabei stets **proportional zur Wirkstoffmenge** im Blut.
Wie groß ist die **konstante Zufuhr** der Wirkstoffmenge pro Minute ?
Welche **Wirkstoffmenge** müsste man pro Minute **zuführen**, damit sich **langfristig 90 mg** im Blut befinden ? (4 VP)

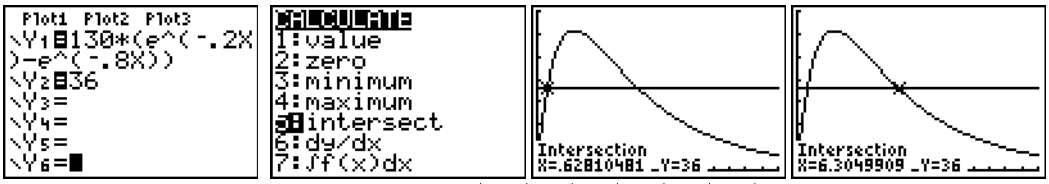
Lösung:

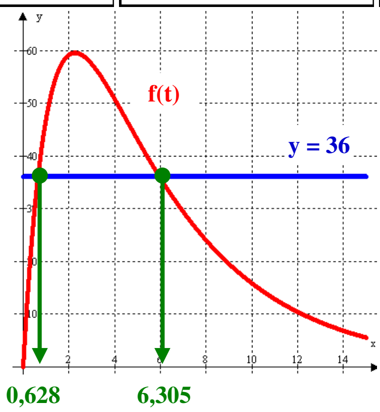
a) Skizze:



Das Medikament wirkt nur dann, wenn **mind**estens **36 mg** des Wirkstoffs im Blut vorhanden sind. **Zeitraum**, in dem das Medikament wirkt:

Es muss gelten: **$f(t) \geq 36$** . Mit GTR:

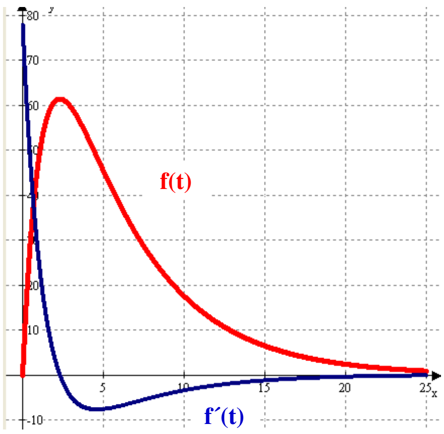




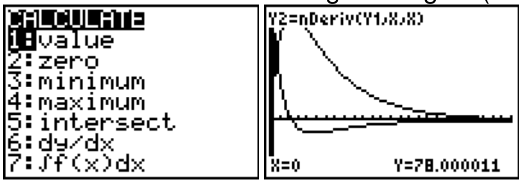
Das Medikament wirkt im Zeitraum **$0{,}628 \leq t \leq 6{,}305$** Stunden nach der Injektion.

Zu welchem **Zeitpunkt** nimmt die Wirkstoffmenge im Blut **am stärksten zu** bzw. **ab** ?

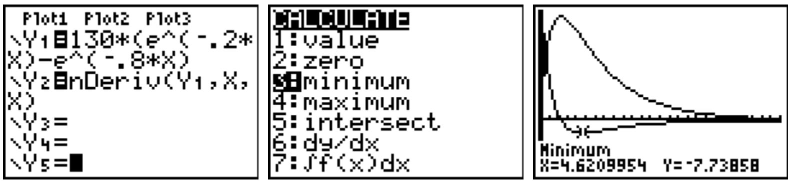
Die Wirkstoffmenge nimmt zu den Zeitpunkten am schnellsten zu bzw. ab, bei denen die Ableitungsfunktion $f'(t)$ ein absolutes Maximum bzw. ein absolutes Minimum besitzt.



Die stärkste **Zunahme** erfolgt zu Beginn (t = 0) (und beträgt f ´(0) = **78 mg/h**).

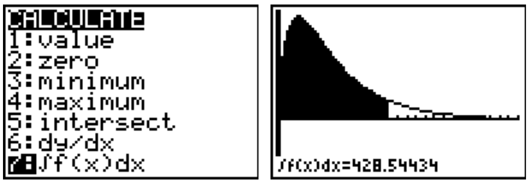


Das **Minimum** von f´(t) ist bei **t = 4,62**. Zu diesem Zeitpunkt nimmt die Wirkstoffmenge am stärksten **ab**. (Diese maximale Abnahme beträgt f ´(4,62) = **- 7,7 mg/h**).

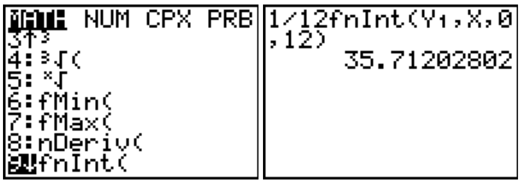


Mittlere Wirkstoffmenge im Blut während der **ersten 12** Stunden:

$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = \frac{1}{12-0}\int_0^{12} f(t)dt = \frac{1}{12} \cdot 428{,}5$ = **35,71** mg.



oder:



$g(t) = 80\ (1 - e^{-0,05t})$; $t \geq 0$

b) Um die **langfristige** Wirkstoffmenge im Blut zu ermitteln, muss man das Verhalten von g(t) für $t \to +\infty$ betrachten. Es gilt $e^{-0,05t} \to 0$ für $t \to +\infty$.

Dann ist $\lim_{t\to+\infty}\left(80\ \left(1 - e^{-0,05t}\right)\right)$ = **80**. Langfristig werden sich **80** mg im Blut befinden.

Zeigen Sie, dass die Wirkstoffmenge im Blut **ständig zunimmt**:

Wenn die Wirkstoffmenge ständig zunimmt, dann muss der Graph von g(t) streng monoton wachsen und dann muss gelten: **g´(t) > 0**.

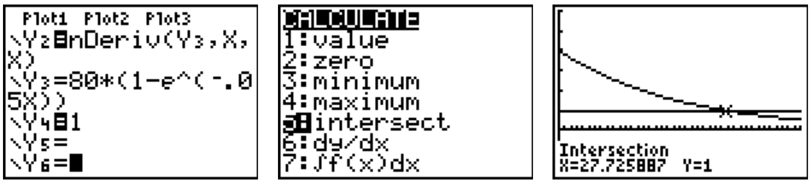
$g'(t) = 80\ (-e^{-0,05t})\ (-0{,}05) = \mathbf{4\ e^{-0,05t} > 0}$ q.e.d.

Zeitpunkt in dem die **momentane Änderungsrate** der Wirkstoffmenge im Blut **1** $\frac{\text{mg}}{\text{min}}$ beträgt:

Da g(t) den Bestand zeigt, wird die momentane Änderungsrate durch g´(t) beschrieben:

$g'(t) = 4\ e^{-0,05t} = 1$; $e^{-0,05t} = \frac{1}{4}$ | ↑ ln ; $-0{,}05\ t = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$; $t = -\frac{1}{0{,}05}\ln\left(\frac{1}{4}\right) \approx$ **27,7 min.**

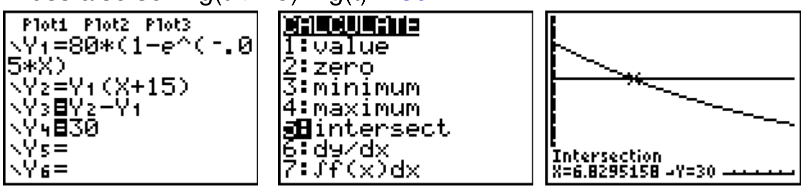
Oder mit GTR:



In welchem **15-Minuten-Zeitraum** ändert sich die Wirkstoffmenge **um 30** mg ?

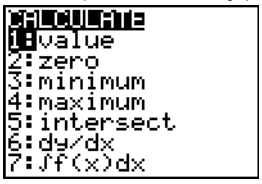
Ein 15-Minuten-Intervall ergibt sich durch die Differenz von g(t + 15) – g(t).

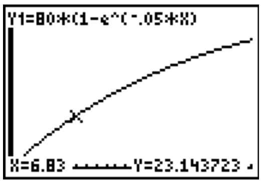
Es muss also sein: g(t + 15) – g(t) = **30**.

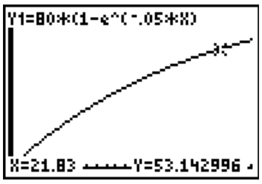


Mit GTR: t = 6,83. Damit ist das 15-Minuten-Intervall [**6,8 ; 21,8**].

Probe (nicht verlangt):







$g_1(6{,}83) = 23{,}14$ $g_2(21{,}83) = 53{,}14$ $\mathbf{g_2 - g_1 = 53{,}14 - 23{,}14 = 30}$

c) Differenzialgleichung des beschränkten Wachstums, die von der Funktion **g** erfüllt wird:

Allgemeine Differenzialgleichung (**DGL**) des **beschränkten** Wachstums: $\mathbf{B'(t) = k\,(S - B(t))}$
Zugehörige **Lösungs**funktion: $\mathbf{B(t) = S - a\,e^{-kt}}$.
Mit $g(t) = 80\ (1 - e^{-0{,}05t}) = 80 - 80\,e^{-0{,}05t}$ ergibt sich; $\mathbf{S = 80}$ und $\mathbf{k = 0{,}05}$.
Damit lautet die Differenzialgleichung: $\mathbf{g'(t) = 0{,}05\,(80 - g(t))}$ $\Rightarrow$ $g'(t) = 4 - 0{,}05\,g(t)$.
Aus dieser Differenzialgleichung erkennt man, dass konstant **4 mg/min**. zugeführt und **5 %** der vorhandenen Menge **abgebaut** werden.

Welche **Wirkstoffmenge** müsste man pro Minute **zuführen**, damit sich **langfristig 90 mg** im Blut befinden ?

Langfristig sollen 90 mg im Blut sein: $S = \mathbf{90}$.
Damit ergibt sich folgende DGL: $g'(t) = 0{,}05\,(\mathbf{90} - g(t)) = \mathbf{4{,}5} - 0{,}05\,g(t)$.
Damit müsste man **konstant** **4,5** mg/min. **zuführen.**

.